UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
PURAS Y APLICADAS
MA1111
Sep-Dic 2008

SEGUNDO PARCIAL DEPARTAMENTAL

1. Responda en cada caso. Muestre el procedimiento que lo llevó a su respuesta (de haber alguno).

   (a) (2 puntos) Por la definición $(\cos(x))' = \lim$ _______; y al calcular este límite el resultado es _______.

   (b) (1 punto) En $x = \frac{\pi}{8}$, $(\tan(2x))'$ tiene el valor de _______

   (c) (2 puntos) Si $f(x) = \cosh(x)$ y $g(x) = \cos(x-1)$ la derivada de $f \circ g(x)$ es _______.

   (d) (1 punto) Si $f(x) = e^{\operatorname{sen}(x)}$, entonces $f''(x)$ es _________.

   No olvide escribir sus respuestas en el cuadernillo.

   Solución:

   (a) Por la definición $(\cos(x))' = \underline{\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}}$ o $(\cos(x))' = \underline{\lim_{y\to x} \frac{\cos(y)-\cos(x)}{y-x}}$; y al calcular este límite el resultado es $\underline{-\operatorname{sen}(x)}$. También era válido calcular la derivada anterior por definición (aunque era más fácil usar directamente la regla de derivación aprendida en clase). El límite se puede calcular de la siguiente manera:
   Sea $L = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}$, entonces

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h+x)-\cos(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)\cos(x)-\operatorname{sen}(h)\operatorname{sen}(x)-\cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h}(-\operatorname{sen}(x)) + \frac{\cos(h)-1}{h}\cos(x).
\end{aligned}
$$

   Recordando que $\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} = 1$ y $\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos(h)}{h} = 0$, tenemos que

$$(\cos(x))' = 1 \cdot (-\operatorname{sen}(x)) + 0 \cdot \cos(x) = -\operatorname{sen}(x).$$

(b) Tenemos que $(\tan(2x))' = 2\sec^2(2x)$. Entonces la derivada en $x = \frac{\pi}{8}$ es

$$2\sec^2\left(2\frac{\pi}{8}\right) = 2\sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 4.$$

(c) $f \circ g(x) = \cosh(\cos(x-1))$. Entonces

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(x) &= \operatorname{senh}(\cos(x-1))(\cos(x-1))' \\ &= -\operatorname{senh}(\cos(x-1))\operatorname{sen}(x-1)\cdot 1 \\ &= -\operatorname{senh}(\cos(x-1))\operatorname{sen}(x-1).\end{aligned}$$

(d) **Solución:** $f'(x) = \cos(x)e^{\operatorname{sen}(x)}$ y $f''(x) = -\operatorname{sen}(x)e^{\operatorname{sen}(x)} + \cos^2(x)e^{\operatorname{sen}(x)}$.

2. Derive las siguientes funciones

(a) (4 ptos) $g(x) = \dfrac{-4x}{(x^2-1)^2}$, para $x \neq \pm 1$. Simplifique su respuesta.

(b) (3 ptos) $F(x) = 2^x \tan(x) + \log_3(x)$, para $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(c) (3 ptos) $G(x) = \operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-x^2})$, para $x \in (-1, 1)$.

Solución:

(a)

$$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{(-4x)'(x^2-1)^2 - (-4x)\left((x^2-1)^2\right)'}{(x^2-1)^4} \\ &= \frac{-4(x^2-1)^2 + 4x\cdot 2(x^2-1)(x^2-1)'}{(x^2-1)^4} \\ &= \frac{-4(x^2-1)^2 + 8x(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} \\ &= \frac{-4(x^2-1)^2 + 16x^2(x^2-1)}{(x^2-1)^4} \\ &= \frac{-4(x^2-1) + 16x^2}{(x^2-1)^3} \\ &= \frac{-4x^2 + 4 + 16x^2}{(x^2-1)^3} = \frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}.\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} F'(x) &= (2^x)' \tan(x) + 2^x(\tan(x))' + (\log_3(x))' \\ &= 2^x \ln(2)\tan(x) + 2^x \sec^2(x) + \frac{1}{x\ln(3)}. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}}(\sqrt{1-x^2})' \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(1-x^2)' \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2}}\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{x^2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

3. (6 ptos) Se sabe que la función $g(x) = x^5 + 2x^3 + 3x + 2$ tiene inversa. Calcule $\frac{d}{dx}\left(g^{-1}(x)\right)$ en $x = 2$.

Solución:

Usamos la fórmula $\left(g^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$. Entonces tenemos que calcular $g'(x)$ y $g^{-1}(2)$, para luego evaluar este último en $g'(x)$. Tenemos que

$$g'(x) = 5x^4 + 6x^2 + 3.$$

Por otro lado $g^{-1}(2) = a$ si y sólo si $g(a) = 2$, es decir, $a^5 + 2a^3 + 3a + 2 = 2$. Esto implica

$$a^5 + 2a^3 + 3a = 0 \Rightarrow a(a^4 + 2a^2 + 3) \Rightarrow a = 0,$$

es decir, $g^{-1}(2) = 0$. Finalmente

$$\left(g^{-1}\right)'(2) = \frac{1}{g'(0)} = \frac{1}{g'(0)} = \frac{1}{5(0)^4 + 6(0)^2 + 3} = \frac{1}{3}.$$

4. (6 ptos) La función $y = f(x)$ satisface la ecuación

$$\operatorname{senh}\left(y^2 + x - 1\right) = y\ln(x^2 + 1).$$

Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(0,1)$.

Solución:

Derivamos implícitamente la identidad dada

$$\cosh\left(y^2+x-1\right)(2yy'+1)=y'\ln(x^2+1)+y\frac{2x}{x^2+1}.$$

Evaluando en $(x,y)=(0,1)$, tenemos que

$$\begin{aligned}\cosh\left(1^2+0-1\right)(2\cdot 1\cdot y'+1)&=y'\ln(0^2+1)+1\cdot\frac{2\cdot 0}{0^2+1}\\ &\Rightarrow 2y'+1=y'\ln(1)\Rightarrow y'=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Por lo tanto la pendiente de la recta tangente en el punto $(0,1)$ es igual a $-\frac{1}{2}$.

5. (6 ptos) Calcule $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)^x$

Solución:

Como $\lim_{x\to\infty}x=\infty$ y $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)=1$, vemos que tenemos una indeterminación del tipo 1^∞. Recordamos que

$$\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)^x=e^{x\ln\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}.$$

Calculamos el límite $L=\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)$, para hacer esto lo reescribimos, obteniendo una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ para luego aplicar L'Hopital

$$\begin{aligned}L&=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}\left(-\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)}{-\frac{1}{x^2}}\\ &=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}(-x^2)\left(-\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)\\ &=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}\left(2+\frac{2}{x}\right)=2.\end{aligned}$$

Entonces

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)^x = e^L = e^2.$$

6. (6 ptos) Sea f una función continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b). Además suponga que $f(a)f(b) < 0$ y que $f'(x) \neq 0$ para $x \in (a,b)$. Demuestre que existe un único $x_0 \in (a,b)$ tal que $f(x_0) = 0$.

   Solución: Como f es continua en $[a,b]$ y $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos distintos, tenemos por el Teorema del Valor Intermedio, que existe un $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 0$. Más aún $c \in (a,b)$ ya que $f(a)f(b) < 0$ (es decir $f(a) \neq 0$ y $f(b) \neq 0$). Nos falta ver que no puede haber otro punto $d \in (a,b)$ tal que $f(d) = 0$. Supongamos que existe tal punto y que $d \neq c$. La función f es diferenciable en el intervalo abierto de extremos c y d y continua en el intervalo cerrado con los mismos extremos, ya que dichos intervalos están contenidos en $[a,b]$. Más aún $f(c) = f(d)$, entonces por el Teorema del Valor Medio (o de Rolle) existe un r en el intervalo abierto de extremos c y d tal que $0 = \frac{f(d)-f(c)}{d-c} = f'(r)$. Pero como $r \in (a,b)$, esto contradice la hipótesis que dice que $f'(x) \neq 0$ para $x \in (a,b)$. Por lo tanto no puede haber dos puntos en (a,b) tal que $f(x) = 0$. Como ya probamos que hay un punto que satisface esto, tenemos entonces que hay exactamente uno.